МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РК
САРАНСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ИМ. АБАЯ КУНАНБАЕВА

ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 0518000 «Учет и аудит (по отраслям)»

ЧАСТЬ 1

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Чемезова Анастасия Сергеевна

Раздел 1. Математическая индукция

Тема 1.1. Дедукция. Понятие полной и неполной индукции. Принцип математической индукции.

Понятие полной и неполной индукции.

Переход от частного к общему, от единичных фактов, установленных с помощью наблюдений и опыта, к обобщениям является закономерностью познания. Неотъемлемой логической формой такого перехода является *индукция*, представляющая собой метод рассуждения от частного к общему, вывод заключения из частных посылок.

Индукция бывает:

1) неполная,

2) полная.

Неполной индукцией называется умозаключение, основанное на рассмотрении одного или нескольких (но не всех) единичных или частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию (или системе понятий). Другими словами, если наши посылки не исчерпывают всевозможные частные случаи, то заключение не является истинным высказыванием, а лишь правдоподобным.

Полной индукцией называется умозаключение, основанное на рассмотрении всех единичных и частных суждений, относящихся к рассматриваемой ситуации.

Дедукция.

Дедукция (в широком смысле) представляет собой форму мышления, состоящую в том, что новое предложение выводится чисто логическим путем, т.е. по определенным правилам логического вывода из некоторых известных предложений. Другими словами, дедукция (от латинского- вывод)- форма мышления от общего к частному.

Пример: Общее суждение: НОД (а, в)=1, если а и в взаимно простые числа.

Частное суждение: НОД(14,15)=1.

Принцип и метод математической индукции.

Для перехода от частных результатов, справедливых для отдельных значений n, к общим, верным для всех n, пользуются *методом математической индукции.* Этот метод основан на так называемом *принципе математической индукции* (аксиоме индукции), который можно сформулировать следующем образом.

Предложение (утверждение) p(n) считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие условия:

1) предложение p(n) истинно для n=1;

2) для любого натурального k из предложение, что p(n) истинно для n=k, следует, что оно истинно и для n=k+1.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения p(n) для всех натуральных значений n, то сначала проверяют истинность высказывания p(1) и затем, допустив истинность высказывания p(k), доказывают истинность высказывания p(k+1). Если высказывание p(1) истинно и для каждого натурального значения k из предложения истинности p(k) следует истинность p(k+1), то в соответствии с принципом математической индукции предложение p(n) является истинным для всех значений n.

Раздел 2. Элементы комбинаторики.

Тема 2.4. Примеры простейших комбинаторных задач. Понятие выборки. Перестановки , размещения, сочетания

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют комбинаторикой. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова combinare, которое означает «соединять, сочетать». Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике, теории вероятностей и других областях знаний.

Приведем примеры некоторых комбинаторных задач.

1) Сколькими способами можно расположить в электрической цепи 7 различных приборов?

2) Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского, на любой другой из этих 5 языков?

3) Вова точно помнит, что в формуле азотной кислоты подряд идут буквы H, N, O и что есть один нижний индекс - то ли двойка, то ли тройка. Сколько имеется вариантов, в которых индекс стоит не на втором месте?

4) Сколько разных типов гамет может дать гибрид, гетерозиготный по 3 независимым признакам?

5) Перечислить все трехзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 1 и 2.

6) Три друга - Антон, Борис и Виктор - приобрели два билета на футбольный матч. Сколько различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?

Таким образом, различают следующие типы комбинаторных задач:

· Задачи, в которых требуется перечислить все решения (пример 5).

· Задачи, состоящие в требовании выделить из всех возможных решений такое, которое удовлетворяет заданному дополнительному требованию (пример 3).

· Задачи, в которых требуется подсчитать число решений (пример 1, 2, 6, 4).

Процесс навыков подсчета комбинаторных объектов можно расчленить на три этапа в зависимости от времени обучения и методов подсчета:

- подсчет методом непосредственного перебора;

- подсчет с использованием комбинаторных принципов;

- подсчет с использованием формул комбинаторики.

Понятие выборки.

Генеральная совокупность.

Суммарная численность объектов наблюдения (люди, домохозяйства, предприятия, населенные пункты и т.д.), обладающих определенным набором признаков (пол, возраст, доход, численность, оборот и т.д.), ограниченная в пространстве и времени. Примеры генеральных совокупностей:

- Все жители Москвы (10,6 млн. человек по данным переписи 2002 года)
- Мужчины-Москвичи (4,9 млн. человек по данным переписи 2002 года)
- Юридические лица России (2,2 млн. на начало 2005 года)
- Розничные торговые точки, осуществляющие продажу продуктов питания (20 тысяч на начало 2008 года) и т.д.

Выборка (Выборочная совокупность)-

Часть объектов из генеральной совокупности, отобранных для изучения, с тем чтобы сделать заключение обо всей генеральной совокупности. Для того чтобы заключение, полученное путем изучения выборки, можно было распространить на всю генеральную совокупность, выборка должна обладать свойством репрезентативности.

Элементы комбинаторики.

Если из некоторого количества элементов, различных меду собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название – **соединения**.

Рассмотрим подробнее эти три типа соединений:

1) **Перестановки.**

Определение. Если в некотором множестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется **перестановкой**.

Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m и вычисляется по формуле:

$$P_m = m!$$

2) **Размещения.**

Определение. Если составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке. Получившиеся при этом комбинации называются **размещениями** из m элементов по n.

Общее число таких размещений расчитывается по формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Вообще говоря, перестановки являются частным случаем размещений.

3) **Сочетания.**

Определение. Если из m элементов составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** из m элементов по n.

Общее число сочетаний находится по формуле:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Также одним из вариантов комбинаций являются **перестановки с повторяющимися элементами**.

Если среди m элементов имеется m_1 одинаковых элементов одного типа, m_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле:

$$\frac{P_m}{P_{m_1} P_{m_2} \ldots P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}$$

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.
Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Тема 2.5 Бином Ньютона. (полиномиальная формула)

В дальнейшем будет получена формула бинома Ньютона с помощью приемов дифференциального исчисления.

Бином Ньютона – это формула, выражающая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности, являются частными случаями бинома Ньютона.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик).

Этот треугольник имеет вид:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
…………………

Формула бинома Ньютона может быть обобщена для произвольного числа слагаемых.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$$
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Напомним, что при вычислениях 0! принимается равным 1.

Пример. В разложении $(x^k + y^p)^n$ найти члены, содержащие x^α, если $k=3,\ p=2,\ n=8,\ \alpha=9$.

По фомуле бинома Ньютона имеем: $\left(x^k + y^p\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(x^k\right)^{n-i} \left(y^p\right)^i$

С учетом числовых значений:

$$\left(x^3 + y^2\right)^8 = \sum_{i=0}^{8} C_8^i x^{3(8-i)} y^{2i}$$

В принципе, можно написать разложение этого выражения в многочлен, определить коэффициеты либо непосредственно, либо из треугольника Паскаля (степень бинома сравнительно невелика), однако, делать это не обязательно, т.к. необходимо найти только член разложения, содержащий x^9.

Найдем число i, соответствующее этому члену: $3(8-i)=9; \qquad i=5.$

Находим: $C_8^5 x^9 y^{10} = \frac{8!}{5!\,3!} x^9 y^{10} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} x^9 y^{10} = 56 x^9 y^{10}$

<u>Пример.</u> В разложении $(x+y+z+w)^m$ найти члены, содержащие x^γ. $m=9,\ \gamma=6.$

По обобщенной формуле бинома Ньютона получаем:

$$(x+y+z+w)^9 = \sum \frac{9!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} w^{n_4}$$

Для нахождения полного разложения необходимо определить все возможные значения n_i, однако, это связано с громадными вычислениями. Однако, т.к. надо найти только члены, содержащие x^6, то $n_1 = 6$, а сумма всех четырех значений n равна 9. Значит, сумма $n_2 + n_3 + n_4 = 3$.

Рассмотрим возможные значения этих величин:

n_2	0	0	3	1	1	0	2	0	2	1
n_3	0	3	0	2	0	1	1	2	0	1
n_4	3	0	0	0	2	2	0	1	1	1

Искомые члены разложения:

$84x^6w^3;\quad 84x^6y^3;\quad 84x^6z^3;\quad 252x^6yz^2;\quad 252x^6yw^2;$

$252x^6zw^2;\quad 252x^6y^2z;\quad 252x^6z^2w;\quad 252x^6y^2w;\quad 504x^6yzw;$

Раздел 3. Теория пределов и непрерывность функции.

<u>Тема 3.8. Понятие последовательности и ее предел.</u>

<u>**Определение.**</u> Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$

Общий элемент последовательности является функцией от n.
$x_n = f(n)$
Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.
Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$
$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \leq M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \geq M$$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.
В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к a при $n\to\infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при n > N верно $\left| 0 - \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при n→∞ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, ..., 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. lim $\{x_n\} = 2$.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$x_n \to a$; $x_n \to b$; $a \neq b$.

Тогда по определению существует такое число ε >0, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a - b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

Теорема. *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

Теорема. *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, \text{при четном } n \\ 2 - \frac{1}{n}, \text{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Монотонные последовательности.

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2)Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3)Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4)Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1}-x_n=\dfrac{n+1}{5\cdot 5^n}-\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n}=$

$=\dfrac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1 - 4n <0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \le M$, где M – некоторое число.

Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что $x_N > a - \varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при $N > n$ $a - \varepsilon < x_N \le x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.

Отсюда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Тема 3.9. Непрерывность и точки разрыва функции. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке.

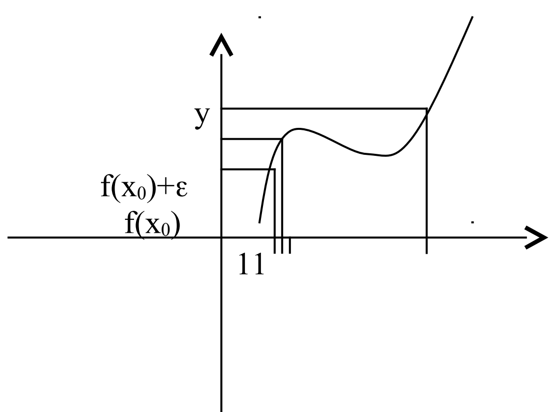
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

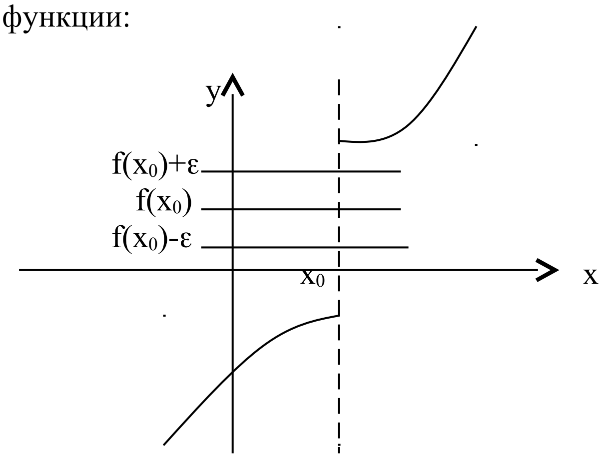
Пример непрерывной функции:



$f(x_0)$-ε

0 x_0-Δ x_0 x_0+Δ x

Пример разрывной функции:



<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$|x - x_0| < \Delta$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

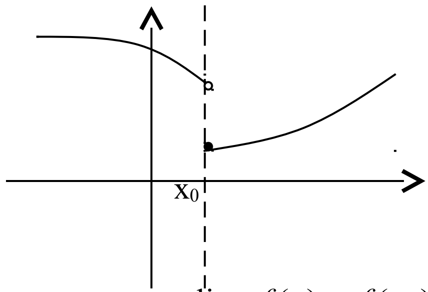
Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Точки разрыва и их классификация.</u>

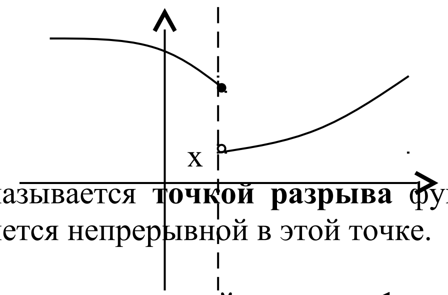
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

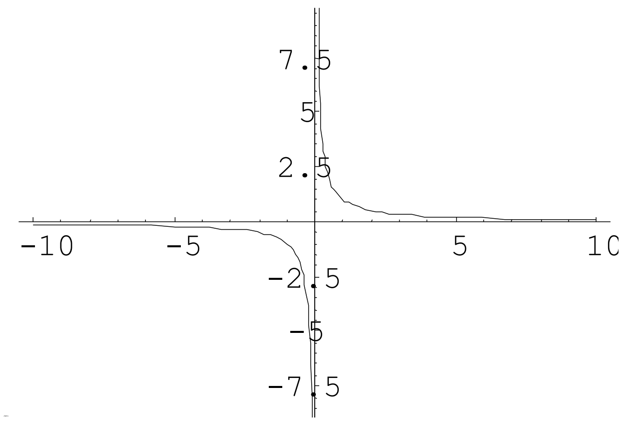
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty .$$

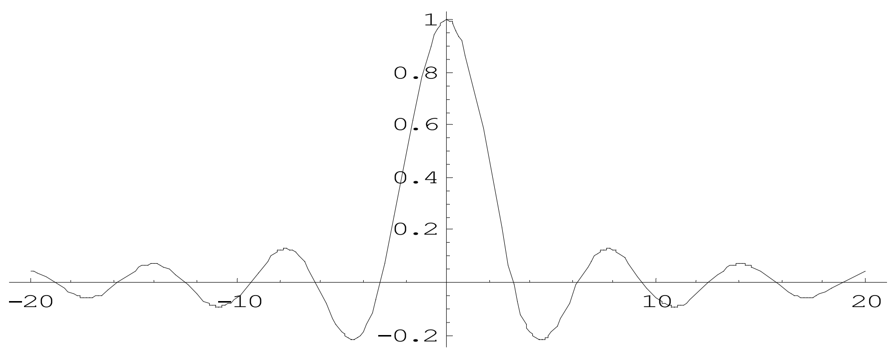


<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

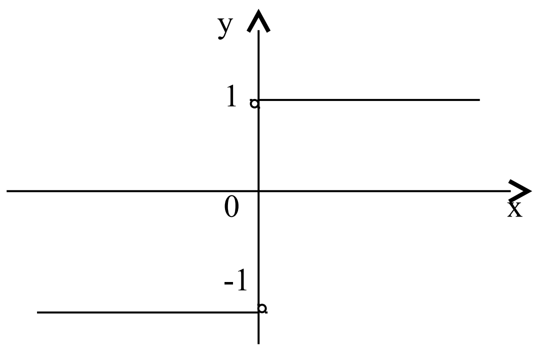
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a, b]$ на бесконечное количество отрезков, которые "стягиваются" к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем
$m \le f(x) \le M$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция $f(x)$- непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \ne \text{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что

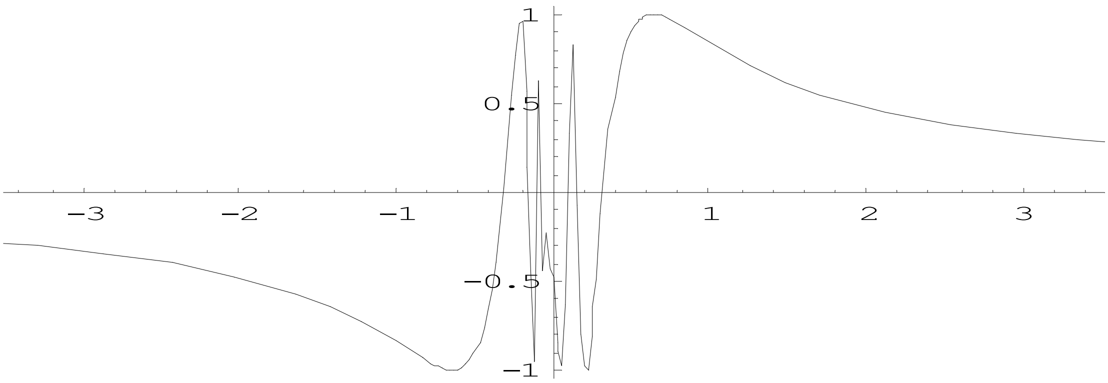
$|x_2 - x_1| < \Delta$

верно неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x.

<u>Свойство 6:</u> Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

<u>Пример.</u> $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

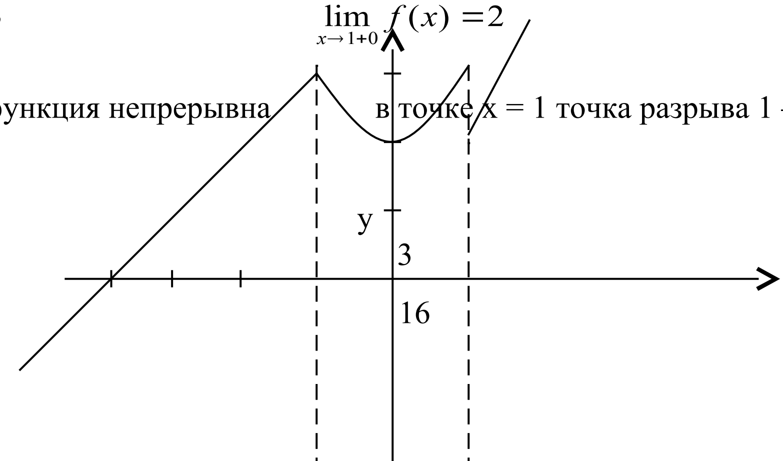
<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$

$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$

в точке x = -1 функция непрерывна $\qquad$ в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



2

-4 -1 0 1 x

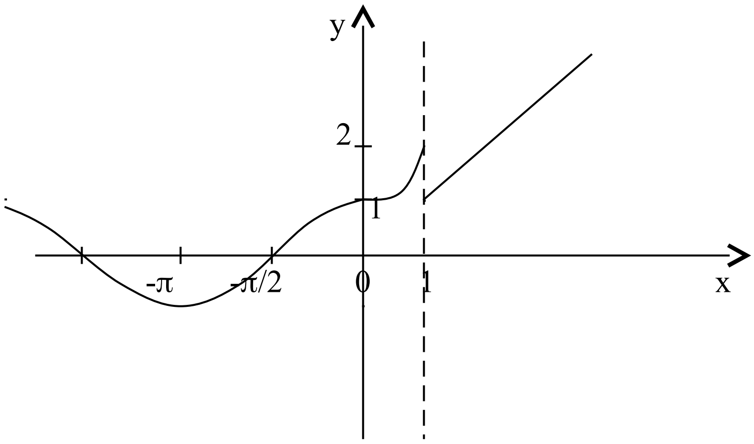
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

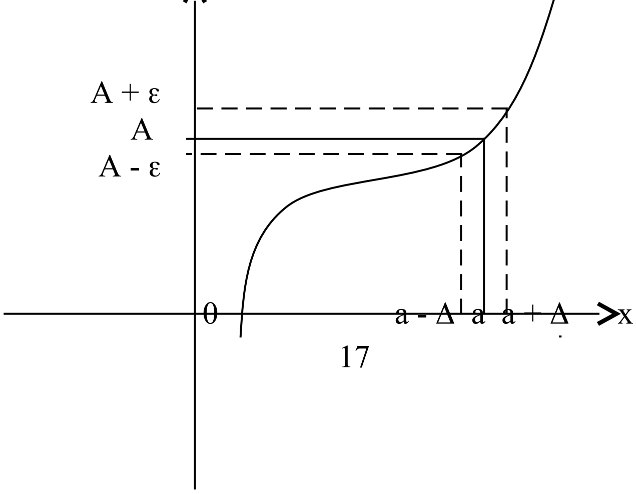
$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 1$

в точке x = 0 функция непрерывна $\qquad$ в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех х таких, что

0 < |x - a| < Δ
верно неравенство |f(x) - A|< ε.

То же определение может быть записано в другом виде:
Если a - Δ < x < a + Δ, x ≠ a, то верно неравенство А - ε < f(x) < A + ε.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где С = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*
Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число М>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

<u>Теорема 7.</u> *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда
$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A|$ или
$|f(x)| < \varepsilon + |A|$, т.е.
$|f(x)| < M$, где $M = \varepsilon + |A|$
Теорема доказана.

Тема 3.10 Необходимые и достаточные условия существования предела функции. Поведение функции в бесконечности

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие существования предела). Функция y = f(x) имеет конечный предел в точке a, тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся
такое $\delta > 0$, что для всех x и x′, удовлетворяющих неравенствам
$0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x' - a| < \delta$,
выполнено неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

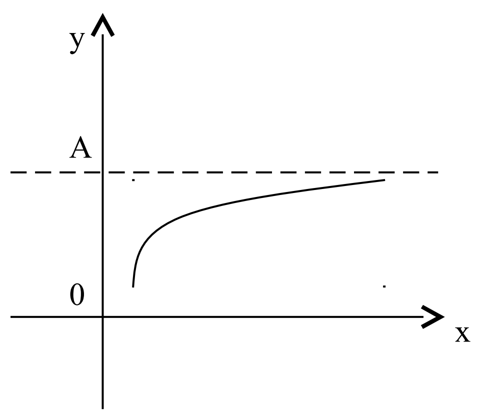
Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

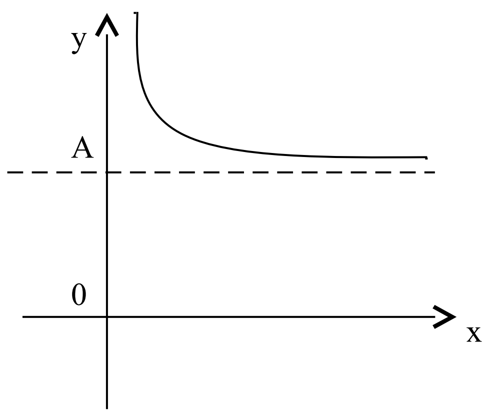
Определение. Число A называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство
$|A - f(x)| < \varepsilon$

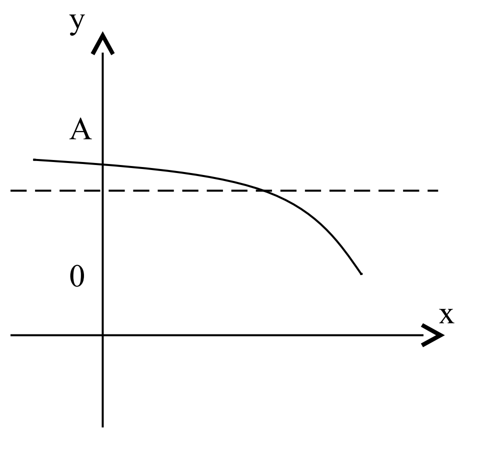
При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

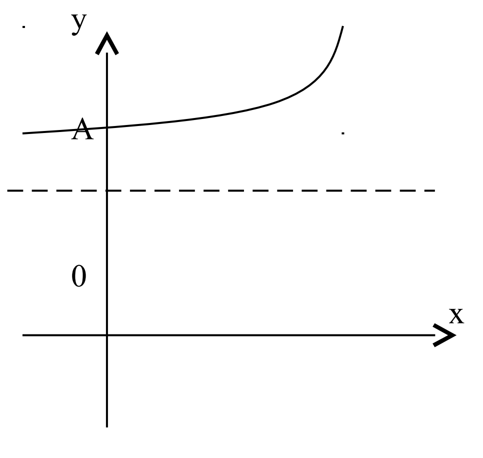
Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:









Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Тема 3.11 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент х. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*
f(x) = A + α(x),
где α(x) – бесконечно малая при x → a (α(x)→0 при x → a).

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где
$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad B = \lim_{x \to a} g(x)$, тогда
f(x) ± g(x) = (A + B) + α(x) + β(x)
A + B = const, α(x) + β(x) – бесконечно малая, значит
$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$
Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где
$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad B = \lim_{x \to a} g(x)$, тогда
$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

A · B = const, α(x) и β(x) – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

<u>Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.</u>

<u>Определение.</u> Предел функции f(x) при x→a, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число Δ>0, что неравенство

$|f(x)|>M$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$0 < |x - a| < \Delta$

Записывается $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

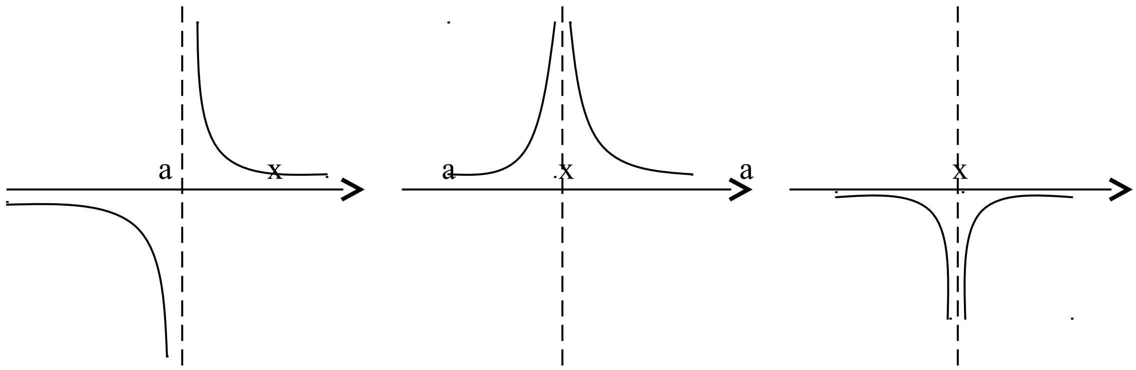
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на f(x)>M, то получим:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$,

а если заменить на f(x)<M, то:

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при x→a, где a – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Тема 3.12 Виды неопределенностей и правила их раскрытия.

Раскрытие неопределённостей — методы вычисления пределов функций, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, то есть переходят в выражения типа:

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	0^0	1^∞	∞^0	$0 \cdot \infty$

по которым невозможно судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют.

Самым мощным методом является правило Лопиталя, однако и оно не во всех случаях позволяет вычислить предел. К тому же напрямую оно применимо только ко второму и третьему из перечисленных видов неопределённостей, то есть отношениям, и чтобы раскрыть другие типы, их надо сначала привести к одному из этих.

Также для вычисления пределов часто используется разложение выражений, входящих в исследуемую неопределённость, в ряд Тейлора в окрестности предельной точки.

Для раскрытия неопределённостей видов $0^0, 1^\infty, \infty^0$ пользуются следующим приёмом: находят предел (натурального) логарифма выражения, содержащего данную неопределённость. В результате вид неопределённости меняется. После нахождения предела от него берут экспоненту.

$$0^0 = e^{0 \cdot ln 0} = e^{0 \cdot \infty}$$
$$1^\infty = e^{\infty \cdot ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$$
$$\infty^0 = e^{0 \cdot ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

Для раскрытия неопределённостей типа $\frac{\infty}{\infty}$ используется следующий алгоритм:

1. Выявление старшей степени переменной;
2. Деление на эту переменную как числителя, так и знаменателя.

Для раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ существует следующий алгоритм:

1. Разложение на множители числителя и знаменателя;
2. Сокращение дроби.

Для раскрытия неопределённостей типа $\infty - \infty$ иногда удобно применить следующее преобразование:

Пусть $f(x) \xrightarrow{x \to a} \infty$ и $g(x) \xrightarrow{x \to a} \infty$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = [\infty-\infty] = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Тема 3.13. Число е. Замечательные пределы. Односторонние пределы.

Число е.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел. По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что е $\le$ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \ge 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$$

Таким образом, число е заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа е.

Можно показать, что число е иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к х до любого действительного числа:

Предположим: $n \le x \le n+1$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

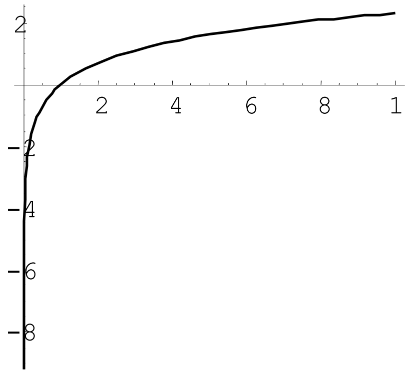
$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} \geq 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Число е является основанием натурального логарифма.

$\log_e x = \ln x = y,\quad т.е.\quad e^y = x.$



Выше представлен график функции y = lnx.

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}}$

Второй замечательный предел. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

Третий замечательный предел. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to \pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to \pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to \pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 – 6x + 8 = 0;$ *$x^2 – 8x + 12 = 0;$*

$D = 36 – 32 = 4;$ ***$D = 64 – 48 = 16;$***

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$ *$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$*

$x_2 = (6 – 2)/2 = 2;$ *$x_2 = (8 – 4)/2 = 2;$*

Тогда $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$=\dfrac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left|x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right|=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$, т.к.

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2-5x+6 \\ -5x^2+11x & \\ -5x^2+5x & \\ \hline 6x-6 & \\ 6x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

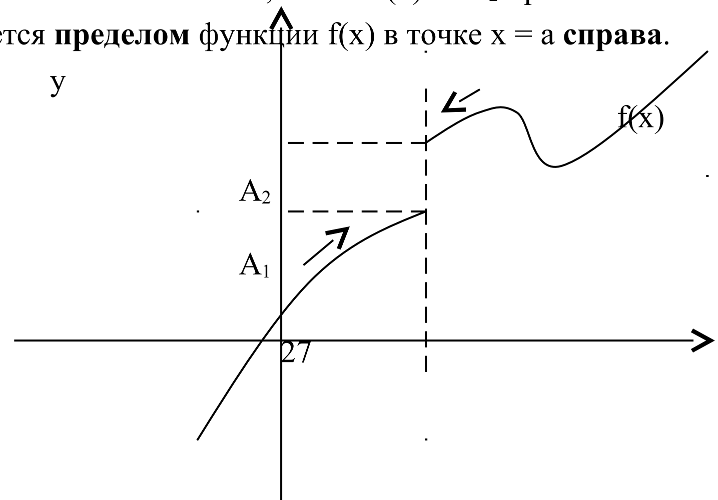
Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

<u>**Определение.**</u> Если $f(x)\to A_1$ при $x\to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **слева**, а если $f(x)\to A_2$ при $x\to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x=a$ **справа**.



0 a x

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a

<u>Тема 3.14 Сравнение бесконечно малых. Принцип замены эквивалентными.</u>

<u>Сравнение бесконечно малых функций.</u>

Пусть α(x), β(x) и γ(x) – бесконечно малые функции при x → a. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция f(x) = x.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A,\quad A\neq 0,\quad A=const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают α ~ β.

<u>Пример.</u> Сравним бесконечно малые при x→0 функции $f(x) = x^{10}$ и f(x) = x.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to a}x^9=0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем f(x) = x.

__**Определение.**__ Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

__Пример.__ Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

__Пример.__ Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

__Свойства эквивалентных бесконечно малых.__

1) $\alpha \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

1 4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

__Следствие:__ а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

__Пример.__ Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

__Пример.__ Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty.$

Если α и β - бесконечно малые при $x\to a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция $x^2 + x$ – бесконечно малая при $x\to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

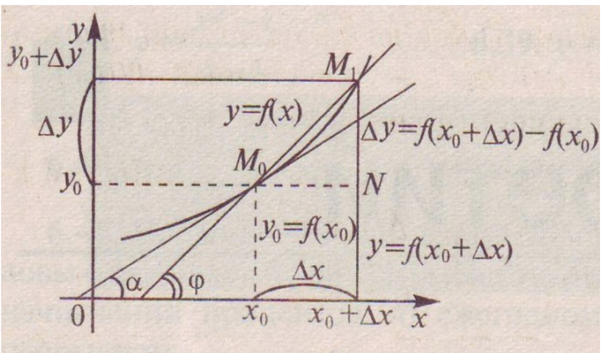
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Раздел 4. Производная и дифференциал.

Тема 4.16 Задачи, приводящиеся к понятию производной. Физический смысл производной.

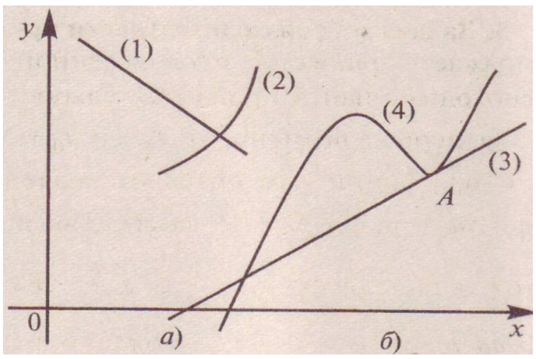
Задачи, приводящиеся к понятию производной

1. **Задача о касательной.** Пусть на плоскости *Oxy* дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0\ (x_0\ ,\ y_0)$.



Прежде всего необходимо выяснить, что мы понимаем под касательной кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющей с кривой одну точку. В самом деле, прямая (1) на рис. 3.2*а* имеет одну общую точку с кривой (2) , но не является касательной к ней. А прямая (3) на рис. 3.2*б*, хотя имеет две общие точки с кривой (4), очевидно, касается ее в точке А. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0\ (x_0\ ;\ f(x_0))$ к точке $M_1(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1



Под *касательной кривой* $y = f(x)$ *в точке* M_0 естественно понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x\to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 , имеет вид
$y - f(x_0) = k\ (x - x_0)$.

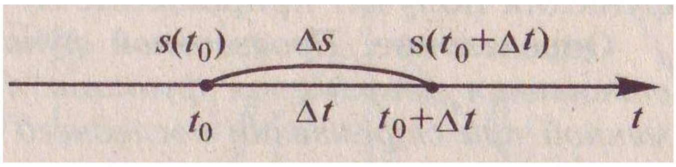
Угловой коэффициент (или тангенс угла φ наклона) секущей k_{M1M0} может быть найден из ΔM_0M_1N : k_{M0M1} = tg $\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 3.1). Тогда угловой коэффициент касательной

$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{MOM1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. **Задача о скорости движения.** Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s – пройденный путь, t – время, и необходимо найти скорость точки в момент t_0.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ – путь

$s_0 + \Delta s = s\,(t_0 + \Delta t)$.



Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент t_0.

Поэтому под *скоростью точки в момент* t_0 естественно понимать предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

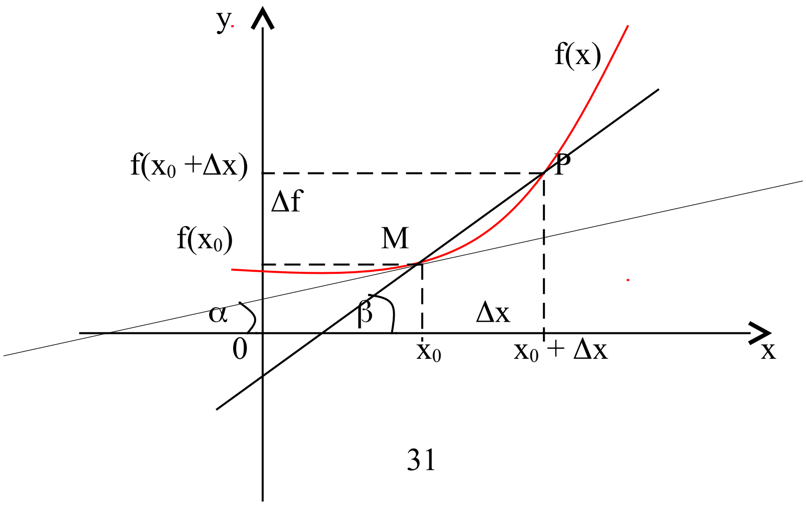
3. **Задача о производительности труда.** Пусть функция u = u(t) выражает количество произведенной продукции u за время t и необходимо найти производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

<u>**Определение.**</u> **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha\ ,}$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, f(x_0)).

Производной функции имеет несколько обозначений: *y', f'(x),* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой*** *в этой точке*. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

<u>Геометрический смысл производной</u> заключается в нахождении углового коэффициента касательной.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

<u>Физический смысл производной функции</u> f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Тема 4.17 Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Докажем теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Теорема . Если функция y=f(x) дифференцируема в произвольной точке x0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция y=f(x) дифференцируема в произвольной точке x0, т.е. имеет в этой точке производную (x0). Запишем приращение функции Δy точке x0:

Δy = (x0) Δ x + Δ x, где →0 при Δ x→0 (см. доказательство теоремы 6.1).

Пусть теперь Δ x→0. Тогда, очевидно, и Δy→0. Но это и означает, что функция y=f(x) непрерывна в точке x0. Теорема доказана.

Утверждение, обратное этой теореме, неверно: из непрерывности функции в данной точке не вытекает её дифференцируемость в этой точке. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие в этой точке производной. Примером такой функции служит функция

y= =

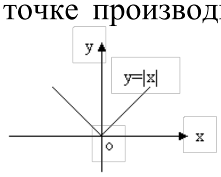


Рис.4

(см. рис.).

Эта функция непрерывна в точке x = 0, но не дифференцируема в ней. Действительно, приращение этой функции в точке x = 0 есть

Δy = f(0+Δ x) – f(0) = f(Δ x) = ,

=   =   ,

т.е. в любой сколь угодно малой окрестности значения   отношение   принимает два различных значения: 1 и −1. Это означает, что предел   не существует, т.е. функция y=   не имеет производной в точке x = 0, а, следовательно, график функции не имеет касательной в точке O(0;0) (поскольку угловой коэффициент касательной должен быть равен производной, но производной не существует).

Тема 4.18 Производные суммы, произведения и частного. Производная тригонометрической, показательной и логарифмической функций.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $(e^x)' = e^x$
6) $(a^x)' = a^x \ln a$
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
9) $(\sin x)' = \cos x$
10) $(\cos x)' = -\sin x$
11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15) $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$
16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Тема 4.19 Производная сложной и обратной функции

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $\boxed{y' = f'(u)\cdot u'}$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Теорема доказана.

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$\boxed{y' = \frac{1}{g'(y)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратная по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctgy.

Функция arctgy является функцией, обратной функции tgx, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$y = tgx; \qquad x = arctgy;$

Известно, что $y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

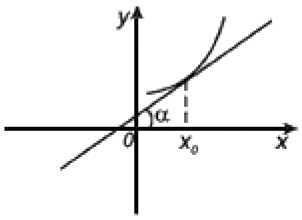
$$(arctgy)' = \frac{1}{1 + y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

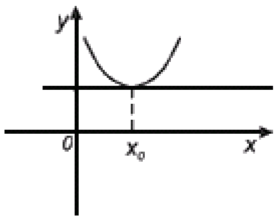
Тема 4.20 Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной.

Геометрический смысл производной

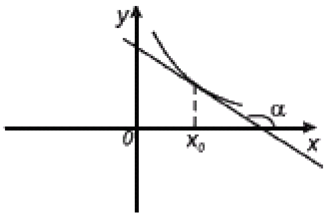
Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$:

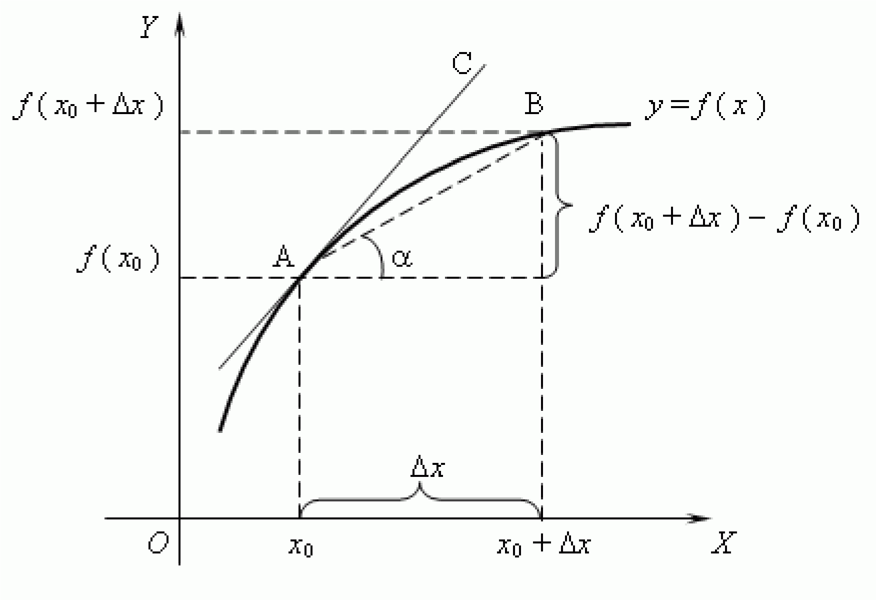


Рис. 1

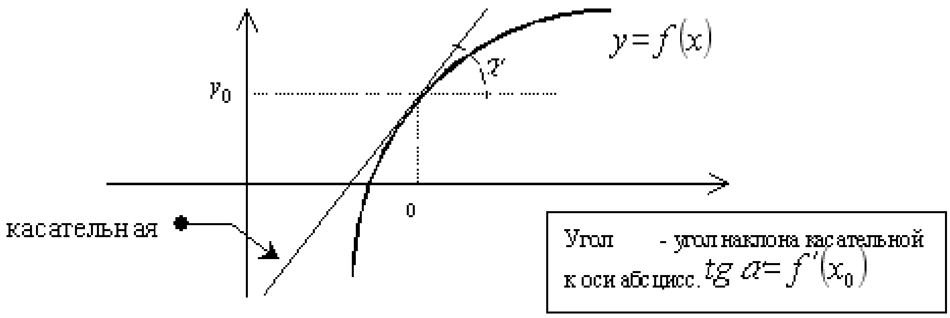
Из рис.1 видно, что для любых двух точек *A* и *B* графика функции: $\Delta x f(x0+\Delta x)-f(x0)=tg\alpha$, где α - угол наклона секущей *AB*.
Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей.
Если зафиксировать точку *A* и двигать по направлению к ней точку *B*, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая *AB* приближается к касательной *AC*.
Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке *A*.
Отсюда следует:

производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

В этом и состоит геометрический смысл производной.

<u>Уравнение касательной к графику.</u>

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$
в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
где $f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной.



Замечание:
В уравнении прямой линии: $y=kx+b$, параметр k - называется угловым коэффициентом, и две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны.

Тема 4.21 Производная высшего порядка и ее механический смысл.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$
$\ldots + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону S=f(t) тогда скорость движения в момент времени t определяется по формуле . В свою очередь скорость V(t) то же есть функция от времени t тогда производная , если она существует определяет скорость изменения, скорости материальной точки движущейся по закону, но скорость ускорения скорости, называется ускорением и обозначается a(t). Таким образом ускорение a(t) прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно одной производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени т.е. .

Тема 4.22 Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявной функции.

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\boxed{(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.}$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0.
Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

lny = vlnu

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\boxed{(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u}$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x;\quad v = x\cos x;$
Производные этих функций: $u' = 2x + 3;\quad v' = \cos x - x\sin x;$
Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x\cdot(x^2 + 3x)^{x\cos x - 1}\cdot(2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x)$$

Тема 4.23 Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. **Дифференциалом** функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

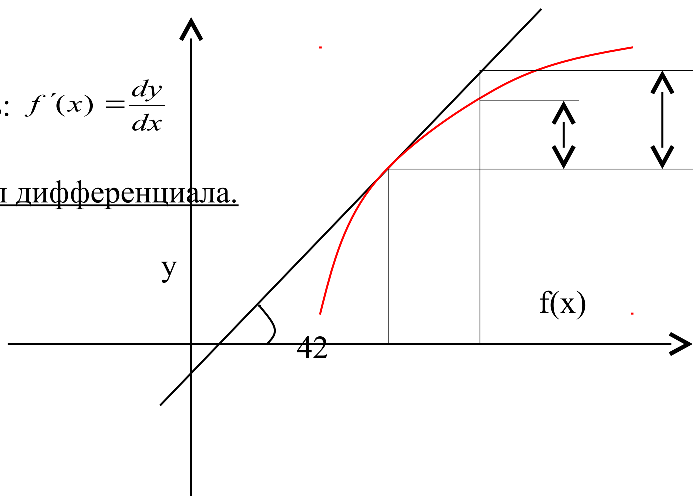
Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



K
dy
M Δy
L

α
x x + Δx x

Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Пусть нам известно значение функции $y_0 = f(x_0)$ и ее производной $y_0' = f'(x_0)$ в точке x_0. Покажем, как найти значение функции в некоторой близкой точке x.

Как мы уже выяснили приращение функции Δyможно представить в виде суммы $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$, т.е. приращение функции отличается от дифференциала на величину бесконечно малую. Поэтому, пренебрегая при малых Δx вторым слагаемым в приближенных вычислениях, иногда пользуются приближенным равенством $\Delta y \approx dy$или Δy»$f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Т.к., по определению, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Откуда

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

Примеры.

1. $y = x^2 - 2x$. Найти приближенно, с помощью дифференциала, изменение y (т.е. Δy), когда x изменяется от 3 до 3,01.

Имеем $\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

$f'(x) = 2x - 2$, $f'(3) = 4$, $\Delta x = 0{,}01$.

Поэтому $\Delta y \approx 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$.

2. Вычислить приближенно значение функции в точке $x = 17$.

Пусть $x_0 = 16$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 17 - 16 = 1$, ,

.

Таким образом, .

3. Вычислить ln 0,99.

Будем рассматривать это значение как частное значение функции $y = \ln x$ при $x = 0{,}99$.

Положим $x_0 = 1$. Тогда $\Delta x = -0{,}01$, $f(x_0) = 0$.

, $f'(1) = 1$.Поэтому $f(0{,}99) \approx 0 - 0{,}01 = -0{,}01$.